ECOLE NATIONALE DE L'AVIATION CIVILE

CONCOURS DE RECRUTEMENTS 1984

CF - CT - CTS

Epreuve optionnelle de

MATHEMATIQUES

(Durée 4 heures)

Les trois parties du problème suivant sont indépendantes.

Le candidat pourra admettre le résultat d'une question qu'il n'arrive pas à démontrer pour l'utiliser dans la suite du problème. Il sera alors pénalisé sur la seule question portant sur le point non établi, mais admis, sans répercussion sur les autres questions.

PREMIERE PARTIE

Soit E l'ensemble des fonctions continues de $[0, 1]$ dans l'ensemble des réels $\mathbb{R}$. E est muni de sa structure naturelle d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Soit F le sous-espace vectoriel de E formé des fonctions polynomiales restreintes à $[0, 1]$.

Pour tout n entier, on définit l'application :

$$P_n : E \longrightarrow F, \quad f \longrightarrow P_n(f)$$

avec $\left[P_n(f)\right](t) = \sum_{p=0}^{n} C_n^p f\left(\frac{p}{n}\right) t^p (1-t)^{n-p}$.

On définit enfin les fonctions I, X, X^2 de E comme suit :

$I(t) = 1$,

$X(t) = t$,

$X^2(t) = t^2$.

Pour l'instant n est fixé :

1°) montrer que P_n est une application linéaire de E dans F.

2°) on définit dans E la relation d'ordre partiel :

$f \leqslant g$ si et seulement si pour tout t de $[0, 1]$ on a $f(t) \leqslant g(t)$

montrer que $f \leqslant g \Longrightarrow P_n(f) \leqslant P_n(g)$.

3°) montrer que $P_n(I) = I$.

4°) en dérivant $\left[P_n(I)\right](t) = 1$ pour tout t de $[0, 1]$, montrer que $P_n(X) = X$.

5°) exprimer $P_n(X^2)$ en fonction de X^2 et X .

6°) On se donne maintenant une fonction f de E et on se propose d'étudier la limite de $P_n(f)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Pour cela on admet le résultat suivant :

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists M_\varepsilon > 0$ ne dépendant que de ε et de f tel que $\forall (t_o, t) \in [0, 1] \times [0, 1]$

$$|f(t) - f(t_o)| < \varepsilon + M_\varepsilon (t - t_o)^2 .$$

Démontrer à partir de ce résultat que pour tout t_o de $[0, 1]$ on a :

$$\left[P_n(f)\right](t_o) - f(t_o) < \varepsilon + \frac{M_\varepsilon}{4n}$$

et

$$f(t_o) - \left[P_n(f)\right](t_o) < \varepsilon + \frac{M_\varepsilon}{4n}$$

Déduire des deux inégalités précédentes que :

$$\sup_{t \in [0, 1]} \left| \left[P_n(f)\right](t) - f(t) \right| \longrightarrow 0$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

(Dans ces conditions, on dit que $P_n(f)$ tend uniformément vers f sur le segment $[0, 1]$ lorsque n tend vers $+\infty$).

7°) pour tout couple (p, n) d'entiers naturels tels que $p < n$ on pose

$$J_n^p = \int_0^1 t^p (1-t)^{n-p} \, dt$$

Chercher pour $p \geqslant 1$ une relation entre J_n^p et J_n^{p-1} et en déduire J_n^p .

.../...

8°) calculer $\int_0^1 \left[P_n(f)\right](t)\,dt$ et donner la limite de cette intégrale lorsque n tend vers $+\infty$.

DEUXIEME PARTIE

n étant fixé dans $\mathbb{N}$ on désigne par $\mathcal{H}$ l'ensemble des matrices $(n \times n)$ à coefficients dans $\mathbb{R}$ et par $\mathcal{H}^*$ le dual de $\mathcal{H}$, c'est-à-dire l'ensemble des applications linéaires de $\mathcal{H}$ dans $\mathbb{R}$.

H étant un sous-ensemble de $\mathcal{H}^*$ on rappelle que l'on définit l'orthogonal de H dans $\mathcal{H}$, noté $H^\perp$, comme l'ensemble des éléments a de $\mathcal{H}$ tel que pour tout élément h de H on ait $h(a) = 0$.

Enfin on rappelle que si $a = (a_{ij})$ où $i = 1, 2, \ldots n$ et $j = 1, 2, \ldots n$, la trace $tr(a)$ de a est définie par $tr(a) = \sum_{i=1}^{n} (a_{ii})$.

1°) Pour tout A de $\mathcal{H}$ on désigne par ϕ_A l'élément de $\mathcal{H}^*$ défini par

$\phi_A : X \in \mathcal{H} \longrightarrow tr(AX) \in \mathbb{R}$.

On désigne par ϕ l'application de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}^*$ qui à A associe ϕ_A.

Montrer que ϕ est linéaire.

2°) Montrer que $(\mathrm{Im}\phi)^\perp = \{0\}$; l'application ϕ est-elle bijective ?

3°) Montrer que pour tout ψ élément de $\mathcal{H}^*$ la proposition :

$\forall (X, Y) \in \mathcal{H}^2$, $\psi(XY) = \psi(YX)$

est équivalente à la proposition :

$\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall X \in \mathcal{H}$, $\psi(X) = \lambda\, tr(X)$.

TROISIEME PARTIE

On désigne par F_n l'ensemble des polynômes d'indéterminée X à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n entier naturel impair.

1°) Notant $B_p(X)$ le polynôme $X^p(1 - X)^{n-p}$, montrer que la famille

$\{B_p(X)\}$, pour $p = 0, 1, \ldots n$, forme une base de F_n.

2°) Soit g l'endomorphisme de F_n qui à tout polynôme P de F_n associe le polynôme $g(P)$ défini par :

$$\left[g(P)\right](X) = P(1-X)$$

où on substitue dans P l'indéterminée $1 - X$ à l'indéterminée X.

On définit dans F_n le produit scalaire de deux éléments P et Q par :

$$\langle P \mid Q \rangle = \int_0^1 P(t)\, Q(t)\, dt.$$

Montrer que pour ce produit scalaire g est un endomorphisme auto-adjoint de F_n, c'est-à-dire que $\langle g(P) \mid Q \rangle = \langle P \mid g(Q) \rangle$ pour tout (P, Q) de F_n^2.

3°) Montrer que :

$$\langle g(P) \mid g(Q) \rangle = \langle P \mid Q \rangle$$

(On dit que g est un endomorphisme orthogonal)

4°) Déterminer une base de F_n dans laquelle la matrice G représentant g est diagonale.

(on dit que g est diagonalisable).

5°) Existe-t-il une base orthogonale de F_n constituée de vecteurs propres de g ? Comment l'obtenir à partir de la base précédente ?
